На правах рукописи

Рабыш Евгений Юрьевич

Аналитическое конструирование регуляторов на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (в технических системах)

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2011

Работа выполнена в Санкт-Петербургском национальном исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Григорьев Валерий Владимирович

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Шишлаков Владислав Федорович

кандидат технических наук, доцент
Башарин Игорь Артемьевич

Ведущая организация: ФГУП ОКБ "Электроавтоматика"
г. Санкт-Петербург

Защита состоится 6 декабря 2011 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.227.03 при Санкт Петербургском национальном исследовательском университете информационных технологий, механики и оптики по адресу: 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д.49, НИУ ИТМО.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики.

Автореферат разослан 5 ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Дударенко Н.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из наиболее широко распространенных научных направлений теории управления является линейно-квадратичное регулирование или аналитическое конструирование оптимальных регуляторов, основанное на минимизации квадратичного критерия качества. Задачи данного типа впервые были рассмотрены в работах Р. Калмана и А.М. Летова. Несмотря на чрезвычайную популярность и видимые достоинства, методология квадратичной оптимизации процессов управления неоднократно подвергалась резкой критике со стороны ведущих ученых. Одним из первых, кто подверг критике квадратичные критерии качества, был В.В. Солодовников, который еще в 1953 г. в своем известном докладе по проблемам качества автоматических систем подчеркивал, что “между значениями квадратичных интегральных оценок и показателей качества, к сожалению, не существует определенного соответствия”. Р. Беллман, касаясь задачи АКОР, отмечал, что данной “менее важной задачей” часто заменяют исходную, “более реалистичную задачу” оптимизации, и подчеркивал: “Это напоминает историю об одном человеке, который, потеряв кольцо посреди улицы, искал его под фонарем, потому что там светлее”, хотя оно “оставалось в той непроглядной темноте, которая показалась слишком затруднительной для поисков”. Впоследствии в работах Р. Калмана, Р. Беллмана и Р. Калабы была поставлена задача о связи между весовыми коэффициентами квадратичного критерия оптимальности и динамическими свойствами оптимизируемых процессов управления, именуемая задачей обращения, или обратной задачей АКОР. До настоящего времени предпринимались многочисленные попытки ее решения. Здесь следует выделить, прежде всего, работы отечественных ученых: А.М. Летова, А.А. Красовского, Я. Курцвейля, Ю.П. Плотникова, А.Г. Александрова, В.Н. Романенко, Ч.П. Даса, Р.Т. Янушевского, В.А. Подчукаева, В.Д. Фурасова, Л.И. Кожинской, Н.В. Кухаренко, Г.А. Крыжановского, Филимонова Н.Б. и др. С другой стороны, классические методы оптимизации по квадратичным критериям качества из-за трудности связи параметров квадратичного функционала с прямыми показателями качества процессов оптимизируемой системы породили различные направления для их обхода. К примеру, А.А. Колесниковым предложен синергетический подход к аналитическому конструированию систем управления.

Развитие аналитических методов конструирования регуляторов для систем автоматического управления, ориентированных на использование ЭВМ в процессе проектирования потребовало установление связей этих методов с качеством процессов синтезируемой системы. И если первоначально эти методы гарантировали асимптотическую устойчивость, то последующее их развитие позволило обеспечить экспоненциальную устойчивость, тесно связанную с оценками быстродействия. Однако экспоненциальная устойчивость гарантирует нам только скорость сходимости процессов к положению равновесия, но никак не влияет на качество их поведения, поэтому далеко не всегда приводит к требуемым показателям переходных процессов систем автоматического управления. Для оценки кроме быстродействия еще и качественных показателей процессов (колебательности) вводится понятие качественной экспоненциальной устойчивости, являющейся сужением понятия экспоненциальной устойчивости благодаря введению условий, ограничивающих фактически значения скорости изменения нормы вектора состояния системы, т.е. качественно экспоненциально устойчивые системы отличает от экспоненциально устойчивых меньшая колебательность и большая плавность процессов.

Одной из актуальных проблем теории управления является анализ поведения неустойчивых систем управления (систем с параметрическими нарушениями), ведь результаты этого анализа являются ценными для принятия решений при выходе из строя автоматической системы управления, когда неустойчивая система управления может представлять собой существенную угрозу, опасность и для человека, и для окружающей среды. При проектировании такой опасной системы управления обязательно необходимо позаботиться о том, чтобы при потере управления, вызванного той или иной причиной, срабатывала система защиты и сигнализации, основанная на динамических свойствах самой системы управления и обеспечивающая минимизацию потерь, связанных с таким инцидентом. Для этого используется понятие качественной экспоненциальной неустойчивости, тесно связанной с качественными показателями процессов неустойчивых систем управления благодаря введению условий, ограничивающих фактически значения скорости изменения нормы вектора состояния системы, что непосредственно связано со степенью расходимости переходных процессов.

Возросшие требования к улучшению качественных характеристик систем автоматического управления приводят разработчиков к необходимости более точного описания исходного объекта, а также самой системы автоматического управления, другими словами возникает потребность учета изменения параметров во времени и адаптации методов анализа и синтеза подобных систем к этому изменению. В приложениях линейные периодические уравнения часто возникают при линеаризации нелинейных систем в окрестности их периодических решений. Периодические линейные уравнения являются простейшим и довольно хорошо изученным классом нестационарных уравнений. Однако существующие методы теории управления для исследования нестационарных систем в ряде случаев не эффективны при решении практических задач. Особое внимание уделяется классу дискретных систем с периодическими коэффициентами, как классу систем, имеющему прикладное значение. К такому классу систем можно отнести радиотехнические, акустические, оптические следящие системы со сканированием, а также системы наведения и ориентации научных приборов.

Данная работа базируется на использовании теории локально-оптимального управления, активно разрабатываемой В.И. Зубовым, Г.Л. Дегтяревым, Г.А. Дидуком, методов исследования устойчивости А.М. Ляпунова, Е.А. Барбашина, Е.С. Пятницкого, оценок качества процессов динамических систем, введенных в работах В.В. Солодовникова, Е.А. Барбашина, А.М. Шубладзе и достаточных условий экспоненциальной устойчивости В.Д. Фурасова.

Цель диссертационной работы. Целью диссертационной работы является построение алгоритмов как аналитического анализа динамических свойств устойчивых и неустойчивых многомерных непрерывных и дискретных объектов управления, так и аналитического синтеза для них регуляторов при помощи полученных аналитических выражений оценок динамических показателей качества переходных процессов.

Научная новизна работы:

- для аналитического анализа динамических свойств многомерных непрерывных и дискретных объектов управления и аналитического синтеза для них регуляторов найдены аналитические выражения оценок прямых показателей качества переходных процессов в виде времени переходного процесса и перерегулирования;
- для аналитического анализа динамических свойств неустойчивых многомерных непрерывных и дискретных систем управления найдены аналитические выражения оценок критического времени переходного процесса и выброса;
- для аналитического анализа динамических свойств многомерных дискретных объектов управления с периодически изменяющимися коэффициентами и аналитического синтеза для них регуляторов найдены достаточное условие экспоненциальной устойчивости и аналитическое выражение оценки времени переходного процесса.

Практическая значимость и реализация результатов.

Применение полученных алгоритмов синтеза регуляторов как для непрерывных, так и для дискретных систем управления позволит значительно улучшить эффективность управления за счет их связи с прямыми показателями качества переходных процессов (временем переходного процесса и перерегулированием); аналитически анализировать динамические свойства неустойчивых многомерных непрерывных и дискретных систем управления, что приведет к увеличению эффективности принятия решений и безопасности при выходе из строя автоматической системы управления, когда неустойчивый объект управления может представлять собой существенную угрозу, опасность и для человека, и для окружающей среды.

Методы исследования. Методы и подходы, используемые в работе базируются на использовании как классических методов исследования, так и современных методик и технологий теории управления. Применение матричного формализма с использованием уравнений типа Ляпунова для решения задач отыскания управления позволяет с единых позиций при использовании единого алгоритмического обеспечения решать различные задачи анализа непрерывных и дискретных объектов управления и синтеза для них регуляторов. Классический метод Ляпунова по-прежнему обладает большой степенью общности применительно к исследованию объектов и систем управления различного класса - непрерывных, дискретных, линейных, нелинейных.

На защиту выносятся следующие результаты и положения:

- алгоритмы аналитического анализа динамических свойств как многомерных непрерывных и дискретных объектов управления, так и многомерных непрерывных и дискретных неустойчивых систем управления, использующие полученные аналитические выражения оценок времени переходного процесса, перерегулирования, критического времени переходного процесса и выброса;
- алгоритм аналитического синтеза регуляторов для многомерных непрерывных и дискретных систем, использующий полученные аналитические выражения оценок времени переходного процесса и перерегулирования;
- алгоритмы как аналитического анализа динамических свойств многомерных дискретных объектов управления с периодически изменяющимися коэффициентами, так и аналитического синтеза для этих объектов управления регуляторов, использующие полученные достаточное условие экспоненциальной устойчивости и аналитическое выражение оценки времени переходного процесса.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях: Международная научная конференция "Системный синтез и прикладная синергетика ССПС-2009", Пятигорск, 2009; XL научная и учебно-методическая конференция СПбГУ ИТМО, 2011; XIII конференция молодых ученых "Навигация и управление движением", Санкт-Петербург, 2011; VIII Всероссийская межвузовская конференция молодых ученых, Санкт-Петербург, 2011; Конференция "Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации (ITRT-2011)", Тольяти, 2011; Международная конференция по математической теории управления и механики, (MTCM-2011), Суздаль, 2011; Международная научная конференция " Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления", Владивосток, 2011; 4-ая Международная научная конференция "Системный синтез и прикладная синергетика (ССПС-2011)", Пятигорск, 2011.

Работа выполнена на кафедре Систем Управления и Информатики Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики и поддержана грантом РФФИ (грант РФФИ № 09-08-00857-а «Методология применения теории качественной устойчивости при проектировании систем управления адаптивной оптикой»).

Разработанные алгоритмы были экспериментально исследованы как с помощью математического моделирования в пакете Simulink программного комплекса MATLAB, так и на реальном объекте - роботе NXT Ballbot.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах в рецензируемых журналах [1-5] входящих в перечень ВАК, а также в 5 статьях в сборниках научных трудов всероссийских и международных конференций [6-10].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех основных глав с выводами и заключением. Основная часть работы изложена на 113 страницах. Список литературы включает 69 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена анализу существующих видов устойчивости и неустойчивости многомерных непрерывных и дискретных систем, а также нахождению достаточных условий экспоненциальной устойчивости для многомерных дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами.

Непрерывная динамическая система описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния системы, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ - вектор начальных состояний, $t \geq 0$ – время, f - n-мерная нелинейная вектор-функция векторного аргумента, такая что при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x \in \mathbb{R}^n$ уравнения (1) существует и единственно.

Непрерывная система (1) в положении равновесия $x = 0$ является качественно экспоненциально (β, r) устойчивой, если для любых траекторий движения системы исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такие параметры ρ $(\rho \geq 1)$, r $(r > 0)$ и β $(\beta < -r)$, при которых в любой момент времени $t \geq 0$ выполняется условие:

$$\left\| x(t) - e^{\beta t} x_0 \right\| \leq \rho\big(e^{(\beta+r)t} - e^{\beta t}\big)\|x_0\|. \tag{2}$$

Непрерывная система (1) в положении равновесия $x = 0$ является качественно экспоненциально (β, r) неустойчивой, если для любых траекторий движения системы исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такие параметры ρ $(\rho \geq 1)$, r $(r > 0)$ и β $(\beta > r)$, при которых в любой момент времени $t \geq 0$ выполняется условие (2).

Здесь и в дальнейшем норма вектора задается соотношением:

$$\|x\| = \left[\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где x_i - i–ая компонента вектора состояния x.

Для оценки процессов используется квадратичная функция Ляпунова:

$$V(x) = x^T P x, \tag{4}$$

где P - симметрическая положительно определенная матрица размерности $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$.

Непрерывная система (1) в положении равновесия $x = 0$ является качественно экспоненциально (β, r) устойчивой, если для любых траекторий движения системы исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r $(r > 0)$ и β $(\beta < -r)$, при которых в любой момент времени $t \geq 0$ выполняется условие:

$$V\big(\dot{x}(t) - \beta x(t)\big) \leq r^2 V\big(x(t)\big). \tag{5}$$

Непрерывная система (1) в положении равновесия $x = 0$ является качественно экспоненциально (β, r) неустойчивой, если для любых траекторий движения системы исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r $(r > 0)$ и β $(\beta > r)$, при которых в любой момент времени $t \geq 0$ выполняется условие (5).

Дискретная динамическая система описывается разностным уравнением вида:

$$x(m+1) = f\big(x(m)\big), \tag{6}$$

где $m = 0,1,2 \ldots$ - номер интервала дискретности, f - n-мерная нелинейная вектор-функция векторного аргумента, такая что при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение $x \in \mathbb{R}^n$ уравнения (6) существует и единственно.

Дискретная система (6) в положении равновесия $x = 0$ является качественно экспоненциально (β, r) устойчивой, если для любых траекторий движения системы исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такие параметры ρ $(\rho \geq 1)$, r $(r > 0)$ и β $(0 \leq \beta < 1 - r)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \geq 0$ выполняется условие:

$$\|x(m) - \beta^m x_0\| \leq \rho((\beta + r)^m - \beta^m)\|x_0\|. \tag{7}$$

Дискретная система (6) в положении равновесия $x = 0$ является качественно экспоненциально (β, r) неустойчивой, если для любых траекторий движения системы исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такие параметры ρ $(\rho \geq 1)$, r $(r > 0)$ и β $(\beta > 1 + r)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \geq 0$ выполняется условие (7).

Дискретная система (6) в положении равновесия $x = 0$ является качественно экспоненциально (β, r) устойчивой, если для любых траекторий движения системы исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r $(r > 0)$ и β $(0 \leq \beta < 1 - r)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \geq 0$ выполняется условие:

$$V\big(x(m+1) - \beta x(m)\big) \leq r^2 V\big(x(m)\big). \tag{8}$$

Дискретная система (6) в положении равновесия $x = 0$ является качественно экспоненциально (β, r) неустойчивой, если для любых траекторий движения системы исходящих из произвольных начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такие параметры r $(r > 0)$ и β $(\beta > 1 + r)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \geq 0$ выполняется условие (8).

На рис. 1 изображены оценочные трубки, получаемые из условий экспоненциальной и качественной экспоненциальной устойчивостей.

Дискретная система с периодически изменяющимися коэффициентами описывается разностным уравнением вида:

$$x\big((mk + i) + 1\big) = F_{i+1} x(mk + i), \tag{9}$$

где k — интервал периодичности; $\mathrm{i} = 0,1, \ldots, \mathrm{k} - 1$ — номер временного шага системы внутри интервала периодичности; $\mathrm{F_{i+1}}$ — k-периодическая матрица описания замкнутой системы на $(\mathrm{i}+1)$-ом шаге внутри интервала периодичности, размерностью $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$.

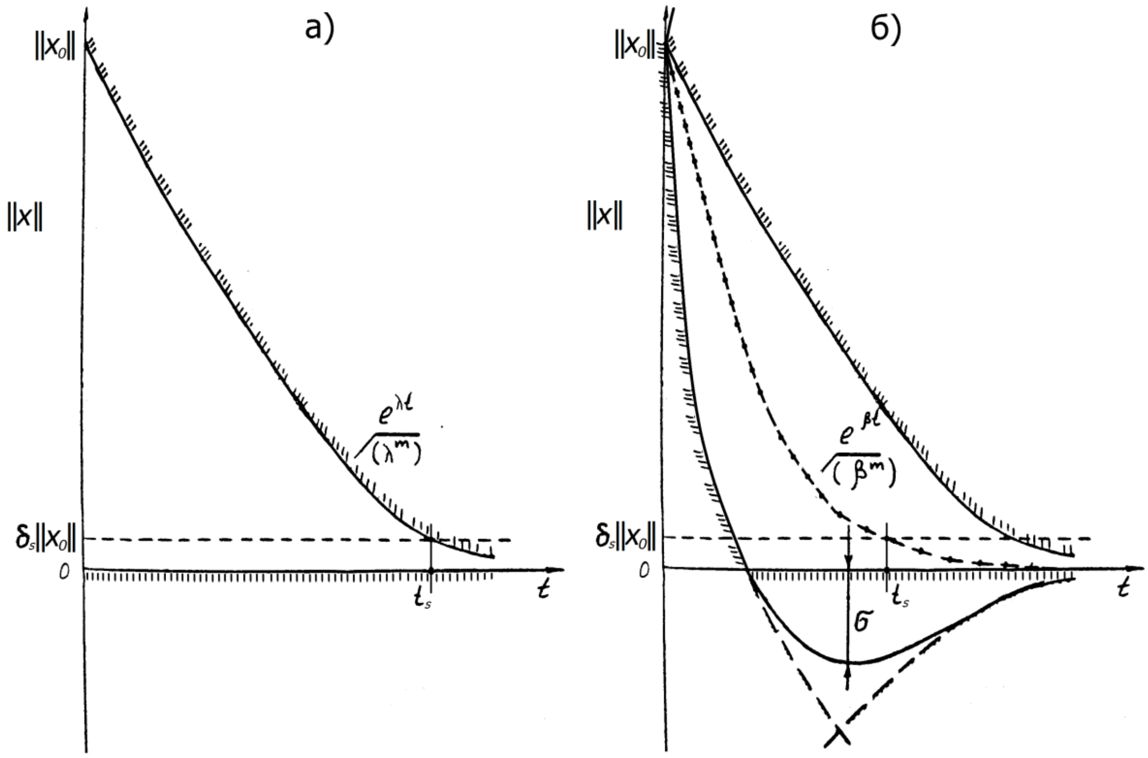

Рис. 1. Оценочные трубки для сравнения оценок качества процессов из условий а) экспоненциальной устойчивости б) качественной экспоненциальной устойчивости.

Для любого дискретного момента времени m значение вектора состояния системы (9) удовлетворяет соотношению:

$$x(mk) = \tilde{F}^m x(0), \tag{10}$$

где $\tilde{\mathrm{F}}$ — обобщённая матрица описания уравнения движения замкнутой системы, определяемая выражением:

$$\tilde{F} = \prod_{i=k-1}^{0} F_{i+1}. \tag{11}$$

Дискретная система с периодически изменяющимися коэффициентами (9) является экспоненциально устойчивой, если существуют такие параметры ρ $(\rho \geq 1)$ и $\tilde{\lambda}$ $(\tilde{\lambda} < 1)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \geq 0$ выполняется условие:

$$\|x(mk)\| \leq \rho \tilde{\lambda}^m \|x(0)\|, \tag{12}$$

где $\tilde{\lambda}$ — обобщенная степень затухания, определяется из выражения:

$$\tilde{\lambda} = \prod_{i=k-1}^{0} \lambda_{i+1}. \tag{13}$$

Дискретная система (9) экспоненциально устойчива, если существуют такая квадратичная функция Ляпунова и такой параметр $\tilde{\lambda}$ $(\tilde{\lambda} < 1)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \geq 0$ выполняется условие

$$V\big(x(mk)\big) \leq \tilde{\lambda}^{2m} V\big(x(0)\big). \tag{14}$$

Заметим, что из выполнения условий (5), (8) и (14) следуют оценки (2), (7) и (12) соответственно, при этом:

$$\rho = \sqrt[2]{\frac{c_2}{c_1}}, \tag{15}$$

где c_1 и c_2 – минимальное и максимальное собственные числа матрицы P соответственно.

Вторая глава посвящена нахождению как аналитических выражений оценок динамических показателей качества переходных процессов, так и алгоритмов аналитического анализа непрерывных и дискретных объектов и систем управления на основе этих выражений.

Под временем переходного процесса в непрерывных и дискретных системах соответственно понимается значение $t = t_s$, такое что:

$$\|x(t)\| = \delta_s \|x_0\|, \tag{16}$$

$$\|x(m)\| = \delta_s \|x_0\|, \tag{17}$$

то есть момент времени, начиная с которого переходной процесс входит в заданную δ_s-окрестность положения равновесия ($\delta_s \le 0{,}05$).

Под перерегулированием в непрерывных и дискретных системах соответственно понимается величина σ, определяемая уравнениями:

$$\sigma = \frac{-\min_{t\in(0,\infty)} x_m(t)}{\|x_0\|}, \tag{18}$$

$$\sigma = \frac{-\min_{m\in(0,\infty)} x_m(m)}{\|x_0\|}, \tag{19}$$

где x_m – миноранта $\|x\|$, то есть функция, ограничивающая снизу текущие значения нормы вектора состояния, так что $x_m \le \|x\|$ для любого момента времени. Перерегулирование косвенно характеризует колебательность в устойчивой динамической системе.

Получены оценки времени переходного процесса и перерегулирования для непрерывных систем:

$$t_s = \frac{1}{\beta}\ln(\delta_s), \tag{20}$$

$$\sigma = \rho e^{\frac{(\beta+r)}{r}\ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)}\right)} - (\rho+1)e^{\frac{\beta}{r}\ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)}\right)}. \tag{21}$$

Получены оценки времени переходного процесса и перерегулирования для дискретных систем:

$$t_s = T\log_\beta(\delta_s), \tag{22}$$

$$\sigma = \rho(\beta+r)^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{\beta}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta+r)}\right)} - (\rho+1)\beta^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{\beta}\right)}\left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta+r)}\right)}, \tag{23}$$

где T - интервал квантования.

Например, при параметрах качества:

$$t_s = 1c, \delta_s = 0{,}05, \sigma = 0{,}05, \rho = 1, \tag{24}$$

используя полученные оценки показателей качества и условия качественной экспоненциальной устойчивости, как для непрерывных, так и для дискретных систем получаем оценочную трубку, вид которой изображен на рис. 2. Все траектории системы, исходящие из области начальных значений вектора состояния и удовлетворяющие заданным показателям качества, лежат внутри этой оценочной трубки.

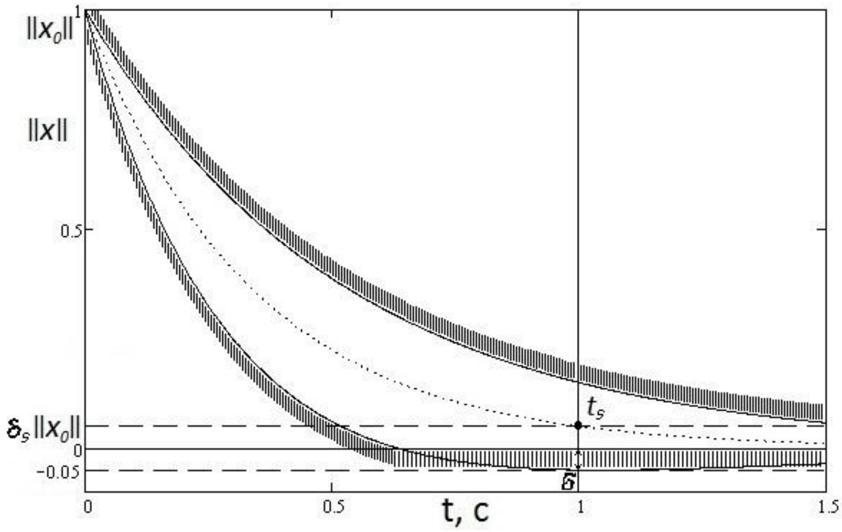

Рис. 2. Оценочные трубки из условий качественной экспоненциальной устойчивости.

Под критическим временем переходного процесса в непрерывных и дискретных системах соответственно понимается значение $t = t_c$, такое что:

$$\|x(t)\| = \delta_c \|x_0\|, \tag{25}$$

$$\|x(m)\| = \delta_c \|x_0\|, \tag{26}$$

то есть момент времени, начиная с которого переходной процесс выходит за заданную критическую δ_c-окрестность начального положения ($\delta_c > 1$).

Под выбросом в непрерывных и дискретных системах соответственно понимается величина σ_0 ($\sigma_0 \geq 1$), определяемая уравнениями:

$$\sigma_0 = \frac{\max_{t \in [0,\,\infty)} x_m(t)}{\|x_0\|}, \tag{27}$$

$$\sigma_0 = \frac{\max_{m \in [0,\,\infty)} x_m(m)}{\|x_0\|}, \tag{28}$$

где x_m – миноранта $\|x\|$, то есть функция, ограничивающая снизу текущие значения нормы вектора состояния, так что $x_m \leq \|x\|$ для любого момента времени. Выброс косвенно характеризует колебательность в неустойчивой динамической системе.

Получены оценки критического времени переходного процесса и выброса для непрерывных систем:

$$t_c = \frac{1}{\beta} \ln(\delta_c), \tag{29}$$

$$\sigma_0 = (\rho + 1) e^{\frac{\beta}{r} \ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)}\right)} - \rho e^{\frac{(\beta+r)}{r} \ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)}\right)}. \tag{30}$$

а также получены оценки критического времени переходного процесса и выброса для дискретных систем:

$$t_c = T \log_\beta(\delta_c), \tag{31}$$

$$\sigma_0 = (\rho + 1) \beta^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{\beta}\right)} \left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta+r)}\right)} - \rho(\beta + r)^{\log_{\left(\frac{\beta+r}{\beta}\right)} \left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta+r)}\right)}. \tag{32}$$

Например, при параметрах качества:

$$t_c = 1c, \delta_c = 10, \rho = 1, \sigma_0 = 5, \tag{33}$$

используя полученные оценки показателей качества и условия качественной экспоненциальной неустойчивости, как для непрерывных, так и для дискретных систем получаем оценочную трубку, вид которой изображен на рис. 3. Все траектории системы, исходящие из области начальных значений вектора состояния и удовлетворяющие заданным показателям качества, лежат внутри этой оценочной трубки.

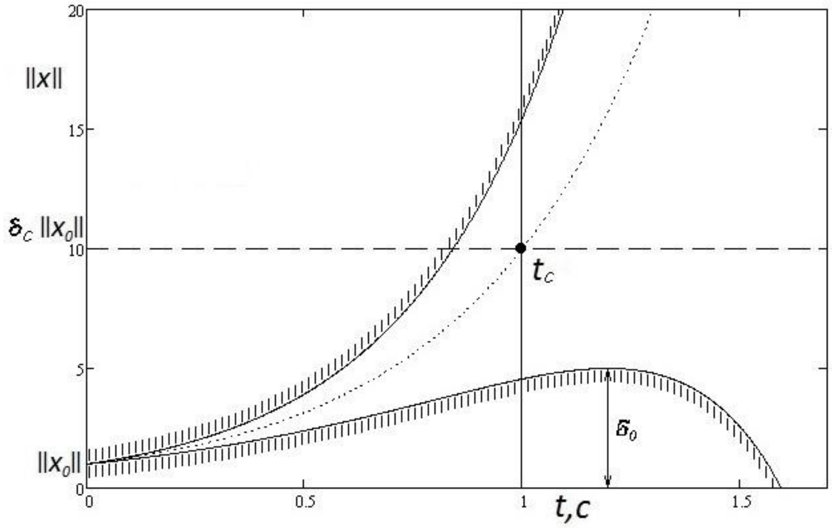

Рис. 3. Оценочные трубки из условий качественной экспоненциальной неустойчивости.

Под временем переходного процесса в дискретных системах с периодически изменяющимися коэффициентами понимается значение $t = t_s$, такое что:

$$\|x(mk)\| \leq \delta_s \|x(0)\|, \forall m \geq t_s/T, \tag{34}$$

то есть момент времени, начиная с которого переходной процесс не выходит за пределы заданной δ_s-окрестности положения равновесия.

Для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами получена оценка времени переходного процесса:

$$t_s \leq T \log_{\tilde{\lambda}} \left(\frac{\delta_s}{\rho}\right), \tag{35}$$

где $\tilde{\lambda}$ определяется выражением (13).

Описание движения непрерывного объекта управления задается уравнением вида:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{36}$$

где $u \in \mathbb{R}^k$ - вектор управления; A - $n \times n$ матрица описания объекта; B - $n \times k$ матрица входов.

Описание движения дискретного объекта управления задается уравнением вида:

$$x(m+1) = Ax(m) + Bu(m), \tag{37}$$

где A - $n \times n$ матрица описания объекта; B - $n \times k$ матрица входов.

Получен алгоритм аналитического анализа динамических свойств многомерных непрерывных и дискретных объектов управления с исходными данными – матрицей описания A:

1. По заданным показателям качества, т.е. времени переходного процесса (t_s) и перерегулированию (σ) определить значения параметров β и r.

3. Проверить на выполнение условия:

$$\max_i \lambda_i \leq 0, i = 1,2, \dots, n, \tag{38}$$

где λ_i определяются из характеристического уравнения:

$$\det\left[[(A-\beta I)^T(A-\beta I)-r^2 I]-\lambda I\right]=0. \qquad (39)$$

Если условие (38) выполняются, то выполняются и заданные показатели качества переходного процесса.

Поведение непрерывной неустойчивой системы управления описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{x}(t)=F_u x(t), \qquad (40)$$

где F_u - $n \times n$ матрица описания системы.

Поведение дискретной неустойчивой системы управления описывается разностным уравнением вида:

$$x(m+1)=F_u x(m), \qquad (41)$$

где F_u - $n \times n$ матрица описания системы.

Получен алгоритм аналитического анализа динамических свойств многомерных непрерывных и дискретных неустойчивых систем управления с исходными данными – матрицей описания F_u:

1. По заданным показателям качества, т.е. критическому времени переходного процесса (t_c) и выбросу (σ_0) определить значения параметров β и r.

3. Проверить на выполнение условия:

$$\max_i \lambda_i \leq 0, i=1,2,\dots,n, \qquad (42)$$

где λ_i определяются из характеристического уравнения:

$$\det\left[[(F_u-\beta I)^T(F_u-\beta I)-r^2 I]-\lambda I\right]=0. \qquad (43)$$

Если условие (42) выполняются, то выполняются и заданные показатели качества переходного процесса.

Описание движения дискретного объекта управления задается уравнением вида:

$$x\big((mk+i)+1\big)=A_{i+1}x(mk+i)+B_{i+1}u(mk+i), \qquad (44)$$

где A_{i+1} – периодическая матрица описания объекта на $(i+1)$-ом шаге внутри интервала периодичности, размерностью $n \times n$; B_{i+1} - периодическая матрица входов объекта по управляющему воздействию на $(i+1)$-ом шаге внутри интервала периодичности, размерностью $n \times k$.

Получен алгоритм аналитического анализа динамических свойств многомерных дискретных объектов с периодически изменяющимися коэффициентами с исходными данными – матрицами описания A_{i+1}:

1. По заданному значению времени переходного процесса (t_s) определить значения параметра $\tilde{\lambda}$.

2. Проверить на выполнение условия:

$$\max_i \lambda_i \leq 0, i=1,2,\dots,n, \qquad (45)$$

где λ_i определяются из характеристического уравнения:

$$\det\left[\left[\left[\prod_{i=k-1}^{0} A_{i+1}\right]^T\left[\prod_{i=k-1}^{0} A_{i+1}\right]-\tilde{\lambda}^2 I\right]-\lambda I\right]=0. \qquad (46)$$

Если условие (45) выполняются, то выполняются и заданные показатели качества переходных процессов.

Третья глава посвящена нахождению алгоритмов аналитического синтеза регуляторов на основе метода локальной оптимизации, использующего условия экспоненциальной и качественной экспоненциальной устойчивостей и полученных аналитических выражений оценок прямых показателей качества переходных процессов для многомерных непрерывных и дискретных объектов управления, а также для дискретных объектов с периодически изменяющимися коэффициентами.

В общем случае предполагая, что все переменные вектора состояния объекта управления доступны для измерения, управление ищется как функция состояний объекта управления в виде:

$$u = -Kx, \tag{47}$$

где $K - k \times n$ матрица линейных стационарных обратных связей по состояниям объекта управления.

Получен алгоритм аналитического синтеза регуляторов по заданным прямым показателям качества для непрерывных или дискретных объектов управления с исходными данными - матрицами A, B:

1. Проверить пару A, B на полную управляемость.
2. По заданным показателям качества t_s, σ определить значения параметров β и r.
3. Вычислить матрицу K, подставив параметр β в уравнение:

$$K = (B^T B)^{-1} B^T (A - \beta I), \tag{48}$$

и проверить на выполнение условия:

$$\max_i \lambda_i \leq 0, i = 1,2, \dots, n, \tag{49}$$

где λ_i определяются из характеристического уравнения:

$$\det\left[\left[(A - BK - \beta I)^T (A - BK - \beta I) - r^2 I\right] - \lambda I\right] = 0. \tag{50}$$

В случае удовлетворения условия (49) выполняются заданные показатели качества.

4. В случае если не удается обеспечить устойчивость системе, то разрешить матричное уравнение типа Риккати:

$$(A - BK - \beta I)^T P (A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q, \tag{51}$$

$$K = (B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I), \tag{52}$$

- где Q – по крайней мере положительно полуопределенная симметрическая матрица размерностью $n \times n$. Затем необходимо проверить на устойчивость полученную систему. В случае получения неустойчивой системы, изменив оценки качества, произвести коррекцию процедуры синтеза.

В общем случае предполагая, что все переменные вектора состояния объекта управления доступны для измерения. Линейный закон управления для объекта управления (44) будем искать в форме:

$$u(mk + i) = -K_{i+1} x(mk + i), i = 0,1, \dots, k - 1, \tag{53}$$

где K_{i+1} - матрицы линейных стационарных обратных связей размерностью $k \times n$.

Для системы с периодически изменяющимися коэффициентами вводится в рассмотрение положительно определённая симметрическая матрица P так, что квадратичная функция Ляпунова принимает вид:

$$V\big(x(mk)\big) = x^T(mk) P^{mk} x(mk). \tag{54}$$

где P — положительно определённая симметрическая матрица, размерностью $n \times n$.

Получен алгоритм аналитического синтеза регуляторов для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами с исходными данными - матрицами A_{i+1}, B_{i+1}:

1. Проверить все пары A_{i+1}, B_{i+1} на полную управляемость.
2. По заданным показателям качества t_s определить значение параметра $\tilde{\lambda}$.
3. Вычислить матрицы K_{i+1}:

$$K_{i+1} = \left(B_{i+1}^T B_{i+1}\right)^{-1} B_{i+1}^T A_{i+1}, i = 0,1, \dots, k-1, \tag{55}$$

и проверить на выполнение условия:

$$\max_i \lambda_i \leq 0, i = 1,2, \dots, n, \tag{56}$$

где λ_i определяются из характеристического уравнения:

$$\det\left[\left[\left[\prod_{i=k-1}^{0}(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1})\right]^T \left[\prod_{i=k-1}^{0}(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1})\right] - \tilde{\lambda}^2 I\right] - \lambda I\right] = 0$$

В случае удовлетворения условия (56) выполняются заданные показатели качества.

4. В случае если не удается обеспечить устойчивость системе, то разрешить матричное уравнение типа Риккати:

$$\left[\prod_{i=k-1}^{0}(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1})\right]^T P^k \left[\prod_{i=k-1}^{0}(A_{i+1} - B_{i+1}K_{i+1})\right] - \tilde{\lambda}^2 P^k = -Q,$$

$$K_{i+1} = \left(B_{i+1}^T P B_{i+1}\right)^{-1} B_{i+1}^T P A_{i+1}. \tag{57}$$

Проверить на устойчивость полученную систему по матрице $\tilde{F}$. В случае получения неустойчивой системы, изменив оценки качества, произвести коррекцию процедуры синтеза.

Четвертая глава посвящена экспериментальной проверке полученных аналитических выражений оценок динамических показателей качества переходных процессов, а также, построенных на их основе, алгоритмов анализа и синтеза систем управлений как с помощью математического моделирования в пакете Simulink программного комплекса MATLAB, так и на реальном объекте - мобильном роботе NXT Ballbot.

Для демонстрации эффективности предлагаемых алгоритмов управления представим результаты математического моделирования объекта, динамика которого описывается уравнением (37) с параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}078 & 0{,}102 & 0{,}401 & -0{,}204 \\ 0 & 0{,}936 & 0{,}015 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}938 & 0 \\ 0 & 0{,}014 & 0 & 0{,}934 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0{,}166 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{58}$$

с интервалом квантования $T = 0{,}1$с.

Построим для этой дискретной системы регулятор на основе метода локальной оптимизации и условий качественной экспоненциальной устойчивости, при этом примем показатели качества как:

$$\sigma = 0{,}1, t_s = 3\text{с}, \delta_s = 0{,}05, \tag{59}$$

используя которые, находим параметры β и r:

$$\beta = 0{,}905, r = 0{,}043, \tag{60}$$

и найдем по (48) матрицу отрицательных обратных связей:

$$K = [1{,}042 \quad 0{,}614 \quad 2{,}416 \quad -1{,}229]. \tag{61}$$

Проверим на выполнение условия (49):

$$\max_i \lambda_i = -0{,}00003 \leq 0, \tag{62}$$

т.е. выполняется, таким образом, заданные показатели качества тоже должны выполняться.

Желаемая оценочная трубка и реакция системы управления (37) с регулятором (61) на начальные отклонения

$$x_0{}^T = [0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5], \tag{63}$$

представлены на рис. 4.

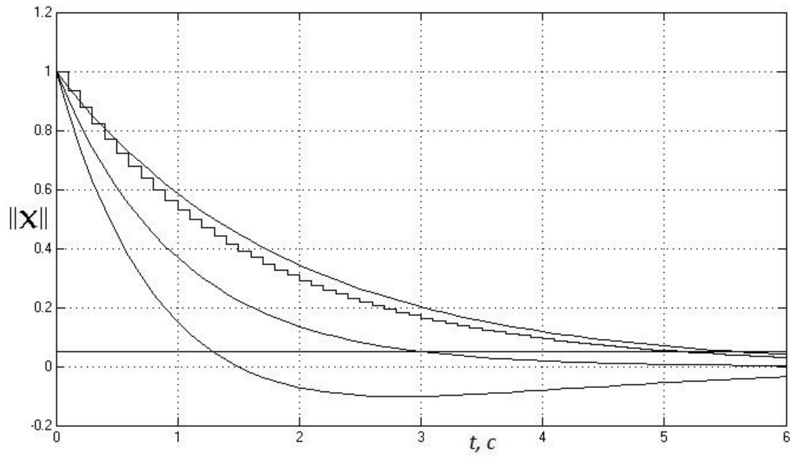

Рис. 4. Переходной процесс нормы вектора состояния и оценочная трубка.

Среди всевозможных объектов, которые нуждаются в управлении, особый интерес для исследователя представляет такой объект, как перевернутый маятник, причиной этого является то, что задача его регулирования легко формализуется и может быть решена многими из существующих на сегодняшний день методами регулирования. Ее значимость для общей теории регулирования в том, что с ее помощью можно проверить эффективность различных методов регулирования.

NXT Ballbot представлен на рис. 5, он балансирует на одном шаре и может рассматриваться как два раздельных и идентичных перевернутых маятника (в XZ и YZ плоскостях), уравнения движения любого из которых имеет вид:

$$0{,}0005\ddot{\theta} + [0{,}003\cos\psi - 0{,}000021]\ddot{\psi} - 0{,}003\dot{\psi}^2\sin\psi =$$
$$= 0{,}047u - 0{,}03\dot{\theta} + 0{,}03\dot{\psi}, \tag{64}$$
$$[0{,}003\cos\psi - 0{,}000021]\ddot{\theta} + 0{,}026\ddot{\psi} - 1{,}1\sin\psi =$$
$$= -0{,}047u + 0{,}03\dot{\theta} - 0{,}03\dot{\psi}. \tag{65}$$

Здесь ψ - угол наклона робота, θ – угол поворота колеса, ν - подаваемое на двигатель напряжение.

Дискретизированная линеаризованная модель перевернутого маятника (система координат представлена на рис. 6):

$$x(m+1) = Ax(m) + Bu(m), \tag{66}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}188 & 0{,}013 & 0{,}076 \\ 0 & 1{,}225 & 0{,}011 & 0{,}097 \\ 0 & -0{,}584 & 0{,}087 & 0{,}725 \\ 0 & 4{,}262 & 0{,}129 & 1{,}069 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7{,}805 \\ -0{,}986 \\ 82{,}155 \\ -11{,}57 \end{bmatrix}, \tag{67}$$

где $x = [\theta \quad \psi \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T$ - вектор состояния, $u = \nu$ – вектор управления, $T = 0{,}1$с. Задача состоит в определении управления, которое обеспечивает стабилизацию роботу NXT Ballbot в неустойчивом вертикальном положении равновесия.

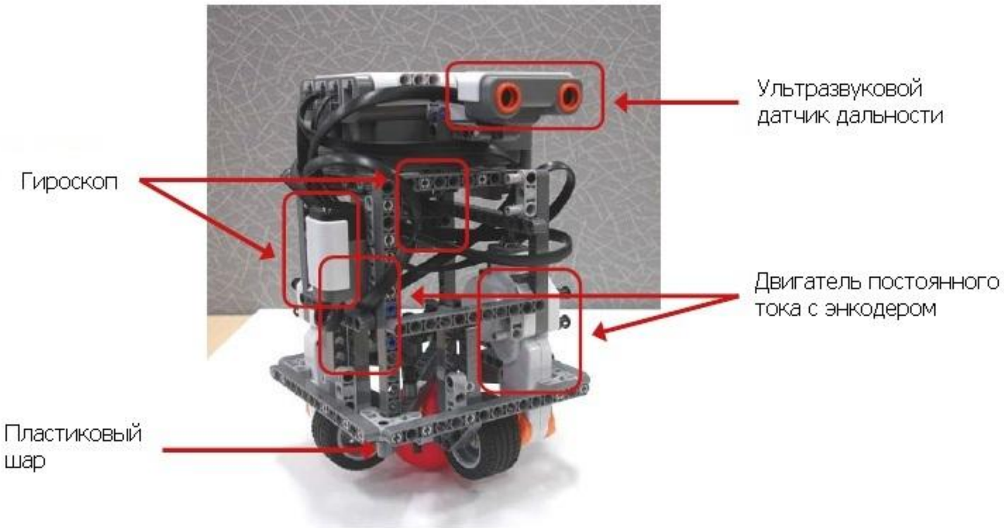

Рис. 5. NXT Ballbot.

Приняв параметры качества как:

$$\sigma = 0{,}1, t_s = 0{,}38\text{с}, \delta_s = 0{,}05, \tag{68}$$

используя которые, находим параметры β и r:

$$\beta = 0{,}455, r = 0{,}2, \tag{69}$$

и, разрешив матричные уравнения типа Риккати (51) относительно матрицы P, найдем матрицу отрицательных обратных связей:

$$K = [-0{,}03 \quad -1{,}585 \quad -0{,}0282 \quad -0{,}241]. \tag{70}$$

Полученный регулятор далее сравнивается с регулятором, полученным традиционным методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов.

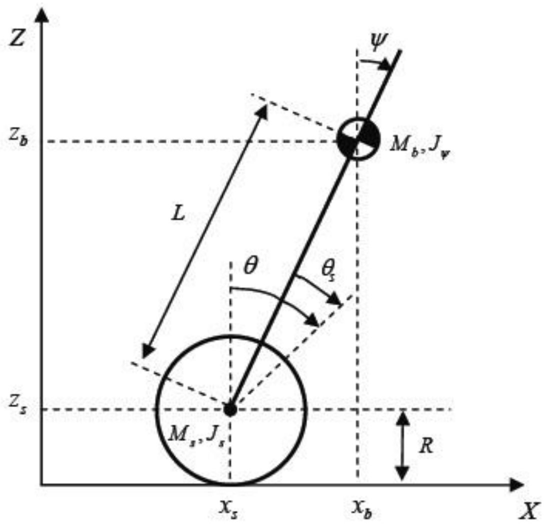

Рис. 6. Система координат перевернутого маятника.

Математическое моделирование и экспериментальные результаты сравнения с традиционным методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов подтверждают достоверность полученных аналитических выражений оценок динамических показателей качества переходных процессов и алгоритмов, построенных на их основе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведено исследование, связанное с проблемой построения регуляторов для многомерных непрерывных и дискретных объектов управления по заданным прямым показателям качества, а именно времени переходного процесса и перерегулированию, при этом:

1. Произведен анализ существующих видов устойчивости и неустойчивости непрерывных и дискретных систем, а также представлены классические методы Ляпунова для их исследования. Для многомерных дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости.
2. Получены аналитические выражения оценок динамических показателей качества в виде времени переходного процесса, перерегулирования, критического времени переходного процесса и выброса, на основе которых разработаны алгоритмы аналитического анализа динамических свойств как многомерных непрерывных и дискретных объектов управления, так и многомерных непрерывных и дискретных неустойчивых систем управления.
3. Для многомерных непрерывных и дискретных объектов управления разработаны алгоритмы аналитического синтеза регуляторов на основе метода локальной оптимизации, использующего условия качественной экспоненциальной устойчивости и полученные аналитические выражения оценок прямых показателей качества переходных процессов.
4. Разработаны алгоритмы как аналитического анализа динамических свойств многомерных дискретных объектов управления с периодически изменяющимися коэффициентами, так и аналитического синтеза для этих объектов управления регуляторов, использующие полученные условия экспоненциальной устойчивости и полученное аналитическое выражение оценки времени переходных процессов.
5. Произведена проверка аналитических выражений оценок динамических показателей качества переходных процессов и, полученных на их основе, алгоритмов анализа и синтеза систем управления с помощью математического моделирования в пакете Simulink программного комплекса MATLAB, так и на реальном объекте - мобильном роботе NXT Ballbot.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Список публикаций в рецензируемых журналах из перечня ВАК

1. Григорьев В.В., Мотылькова М.М., Рабыш Е.Ю., Черевко Н.А., Рюхин В.Ю. Исследование систем пространственного слежения с

периодическими коэффициентами // Известия вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 11. С. 16-23.

2. Бобцов А.А., Быстров С.В., Григорьев В.В., Мотылькова М.М., Рабыш Е.Ю., Рюхин В.Ю., Мансурова О.К. Синтез модальных управлений для проектирования статических регуляторов в дискретных системах с периодически изменяющимися коэффициентами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 5. С. 23-28.

3. Быстров С.В., Григорьев В.В., Рабыш Е.Ю., Черевко Н.А. Экспоненциальная устойчивость непрерывных динамических систем // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2011. Т. 73, № 3. С. 44-47.

4. Быстров С.В., Григорьев В.В., Мансурова О.К., Рабыш Е.Ю., Рюхин В.Ю., Черевко Н.А. Проектирование статических регуляторов в дискретных системах с периодически изменяющимися коэффициентами // Известия вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 6. С. 18-24.

5. Григорьев В.В., Быстров С.В., Наумова А.К., Рабыш Е.Ю., Черевко Н.А. Использование условий качественной экспоненциальной устойчивости для оценки динамических процессов // Известия вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 6. С. 24-30.

Список публикаций в сборниках научных трудов всероссийских и международных конференций

6. Бобцов А.А., Быстров С.В., Григорьев В.В., Мотылькова М.М., Рабыш Е.Ю., Рюхин В.Ю., Мансурова О.К. Синтез регулятора со встроенной моделью внешних воздействий для дискретных систем с периодически изменяющимися коэффициентами // Сборник докладов Международной научной конференции «Системный синтез и прикладная синергетика ССПС-2009». Пятигорск: Рекламно-информационное агентство на КМВ, 2009. С. 194-198.

7. Рабыш Е.Ю., Григорьев В.В. Качественная экспоненциальная устойчивость и неустойчивость динамических систем // Сборники тезисов докладов VIII Всероссийской межвузовской конференции молодых ученых, Выпуск 1. Труды молодых ученых. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. С. 207-208.

8. Быстров С.В., Григорьев В.В., Рабыш Е.Ю. Конструирование оптимальных регуляторов на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости // Сборник тезисов докладов Международной конференции по математической теории управления и механики. М.: МИАН, 2011. С. 55-58.

9. Рабыш Е.Ю., Григорьев В.В., Быстров С.В. Оценки качества процессов на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости // Сборник аннотаций докладов Всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления». Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2011. С. 91.

10. Рабыш Е.Ю., Григорьев В.В., Быстров С.В. Анализ поведения неустойчивых непрерывных и дискретных динамических систем // Сборник статей I международной заочной научно-технической конференции «Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации». Тольятти: Изд-во ПВГУС, 2011. С. 263-270.